12. Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Временной ряд (time series) — последовательность наблюдений значений некоторой переменной, произведенных через равные промежутки времени. Если принять длину такого промежутка за единицу времени (год, квартал, день и т.п.), то можно считать, что последовательные наблюдения $x_1, \dots, x_n$ произведены в моменты $t = 1, \dots, n$.

Основная отличительная особенность статистического анализа временных рядов состоит в том, что последовательность наблюдений $x_1, \dots, x_n$ рассматривается как реализация последовательности, вообще говоря, статистически зависимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, имеющих некоторое совместное распределение с функцией распределения $F(v_1, v_2, \dots, v_n) = P\{X_1 < v_1, X_2 < v_2, \dots, X_n < v_n\}$.

Мы будем рассматривать в основном временные ряды, у которых совместное распределение случайных величин $X_1, \dots, X_n$ имеет совместную плотность распределения $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ряд $x_t, t = 1, \dots, n$, называется строго стационарным (или стационарным в узком смысле), если для любого $m (m < n)$ совместное распределение вероятностей случайных величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_m}$ такое же, как и для $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$, при любых $t_1, \dots, t_m$ и τ , таких, что $1 \leq t_1, \dots, t_m \leq n$ и $1 \leq t_1 + \tau, \dots, t_m + \tau \leq n$.

Другими словами, свойства строго стационарного временного ряда не изменяются при изменении начала отсчета времени. В частности, при $m = 1$ из предположения о строгой стационарности временного ряда x_t следует, что закон распределения вероятностей случайной величины X_t не зависит от t , а значит, не зависят от t и все его основные числовые характеристики (если, конечно, они существуют), в том числе: математическое ожидание $E(X_t) = \mu$ и дисперсия $D(X_t) = \sigma^2$.

Значение μ определяет постоянный уровень, относительно которого колеблется анализируемый временной ряд x_t , а постоянная σ характеризует размах этих колебаний. Члены временного ряда являются статистически взаимозависимыми. Степень тесноты статистической связи между случайными величинами X_t и $X_{t+\tau}$ может быть измерена парным коэффициентом корреляции.

$$\text{Corr}(X_t, X_{t+\tau}) = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) / \sqrt{D(X_t)D(X_{t+\tau})}$$

где

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+\tau} - E(X_{t+\tau}))]$$

Если ряд x_t стационарный, то значение $\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$ не зависит от t и является функцией только от τ ; мы будем использовать для него обозначение $\gamma(\tau) : \gamma(\tau) = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$. В частности, $D(X_t) = \text{Cov}(X_t, X_t) \equiv \gamma(0)$. Соответственно, для стационарного ряда и значение коэффициента корреляции $\text{Corr}(X_t, X_{t+\tau})$ зависит только от τ ; мы будем использовать для него обозначение $\rho(\tau)$, так что

$$\rho(\tau) = \text{Corr}(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau) / \gamma(0).$$

В частности, $\rho(0) = 1$.

Практическая проверка строгой стационарности ряда x_t на основании наблюдения значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ в общем случае затруднительна. В связи с этим под стационарным рядом на практике часто подразумевают временной ряд x_t , у которого

- $E(X_t) \equiv \mu$,
- $D(X_t) \equiv \sigma^2$,
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$ для любых t и τ .

Ряд, для которого выполнены указанные три условия, называют стационарным в широком смысле (слабо стационарным, стационарным второго порядка или ковариационно-стационарным).

Если ряд является стационарным в широком смысле, то он не обязательно является строго стационарным. В то же время, и строго стационарный ряд может не быть стационарным в широком смысле просто потому, что у него могут не существовать математическое ожидание и/или дисперсия. (В отношении последнего примером может служить случайная выборка из распределения Коши.)